Tema 2. Mecánica

Fundamento físico del Tiro Parabólico

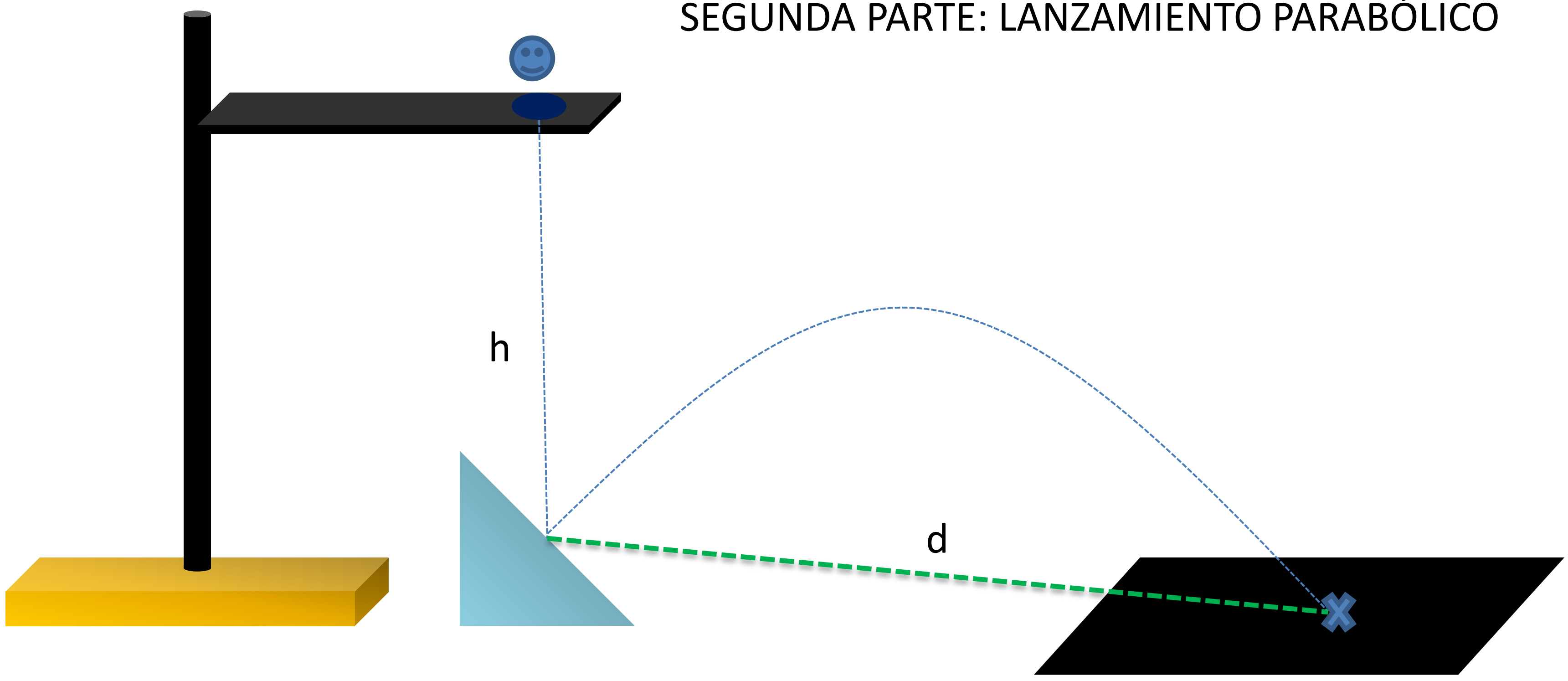
Contenidos

- Cinemática del movimiento uniformemente acelerado
- Ecuación de la trayectoria de un cuerpo
- Concepto de fuerza
- Interacciones fundamentales: la gravedad
- Campo y potencial gravitatorios
- Trabajo y energía
- Conservación de la energía
- Conservación del ímpetu
- Transferencia de energía mediante choques

Movimiento uniformemente acelerado

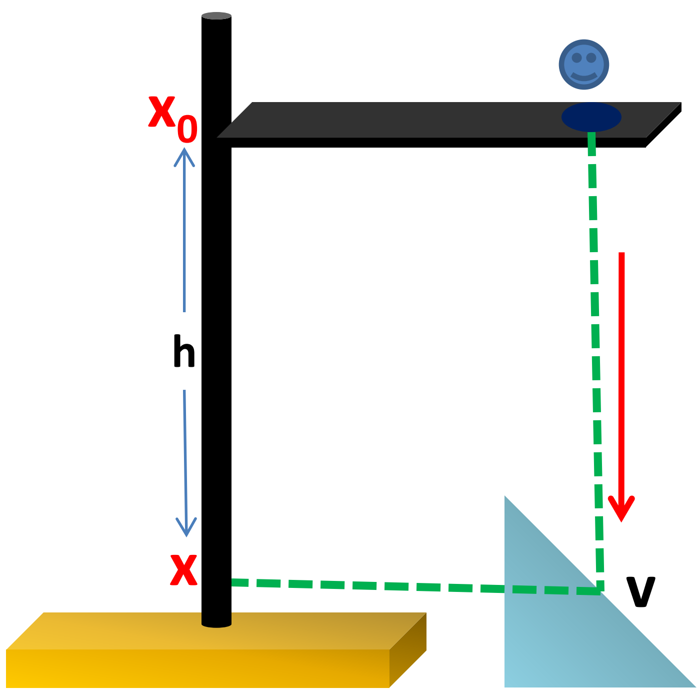
- Ejemplo: Tiro parabólico

PRIMERA PARTE DEL MOVIMIENTO: CAÍDA LIBRE
SEGUNDA PARTE: LANZAMIENTO PARABÓLICO



Caída libre

- Movimiento uniformemente acelerado **en una dimensión** (a = g $\Rightarrow$ constante)



Ecuaciones del movimiento

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$t = 0, \quad v = v_0 \Rightarrow v = v_0 + a \cdot t$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$t = 0, \quad x = x_0 \Rightarrow x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$v_0 = 0 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

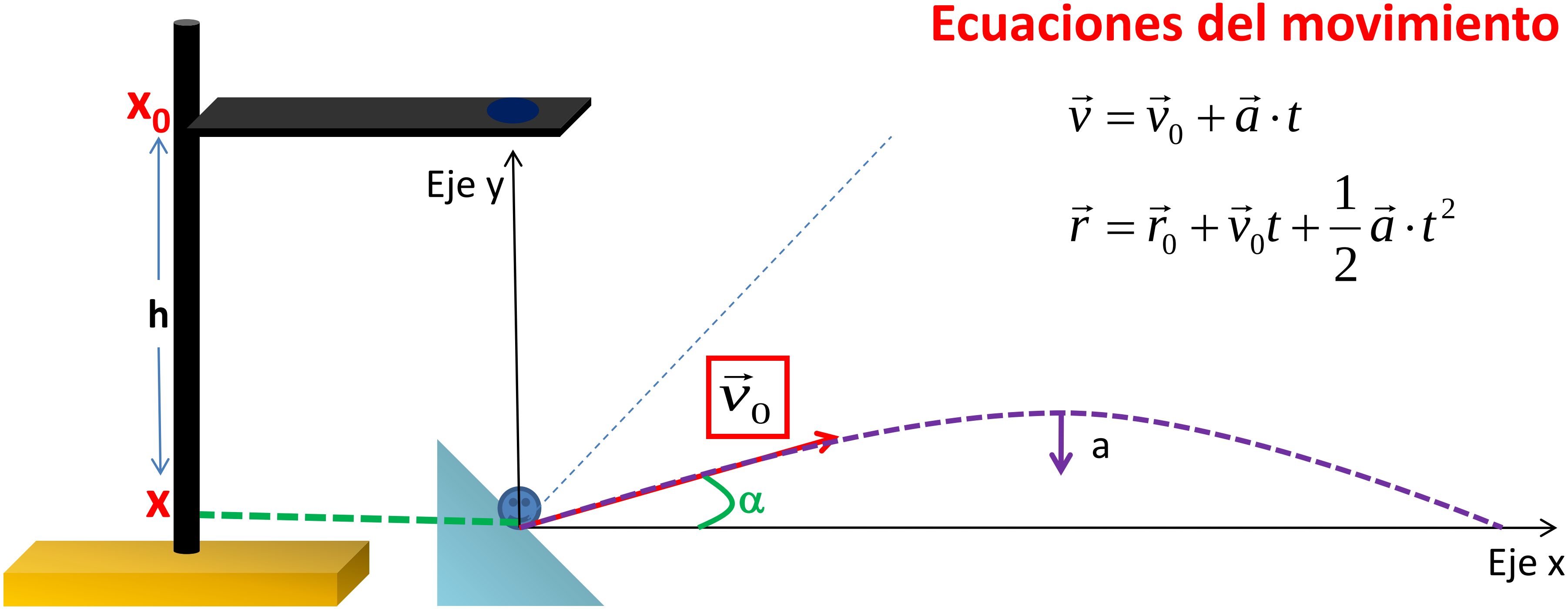
Lanzamiento parabólico

- Movimiento uniformemente acelerado **en dos dimensiones**

Ecuaciones del movimiento

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$



Lanzamiento parabólico

- Movimiento uniformemente acelerado en dos dimensiones

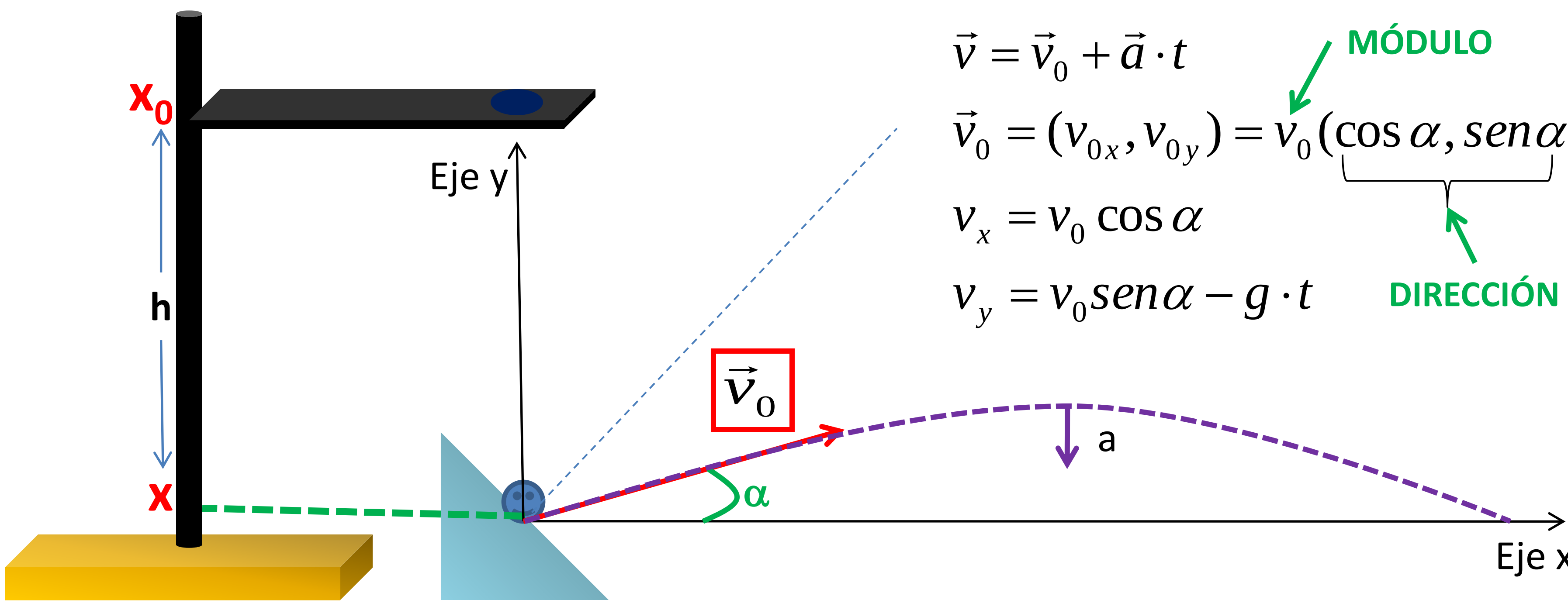
Ecuaciones del movimiento

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = \overset{\text{MÓDULO}}{v_0}\underbrace{(\cos\alpha, sen\alpha)}_{\text{DIRECCIÓN}}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 sen\alpha - g \cdot t$$



Lanzamiento parabólico

- Movimiento uniformemente acelerado en dos dimensiones

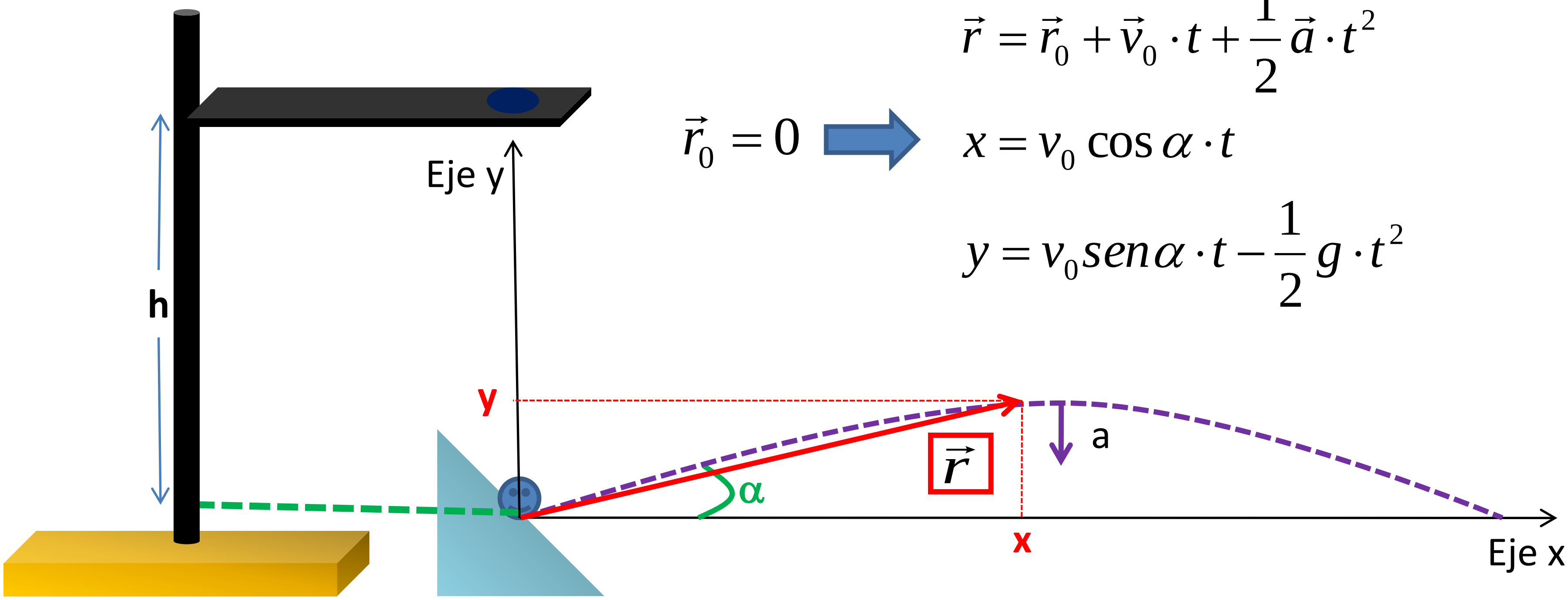
Ecuaciones del movimiento

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2$$

$$\vec{r}_0 = 0 \Rightarrow$$

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$y = v_0 sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

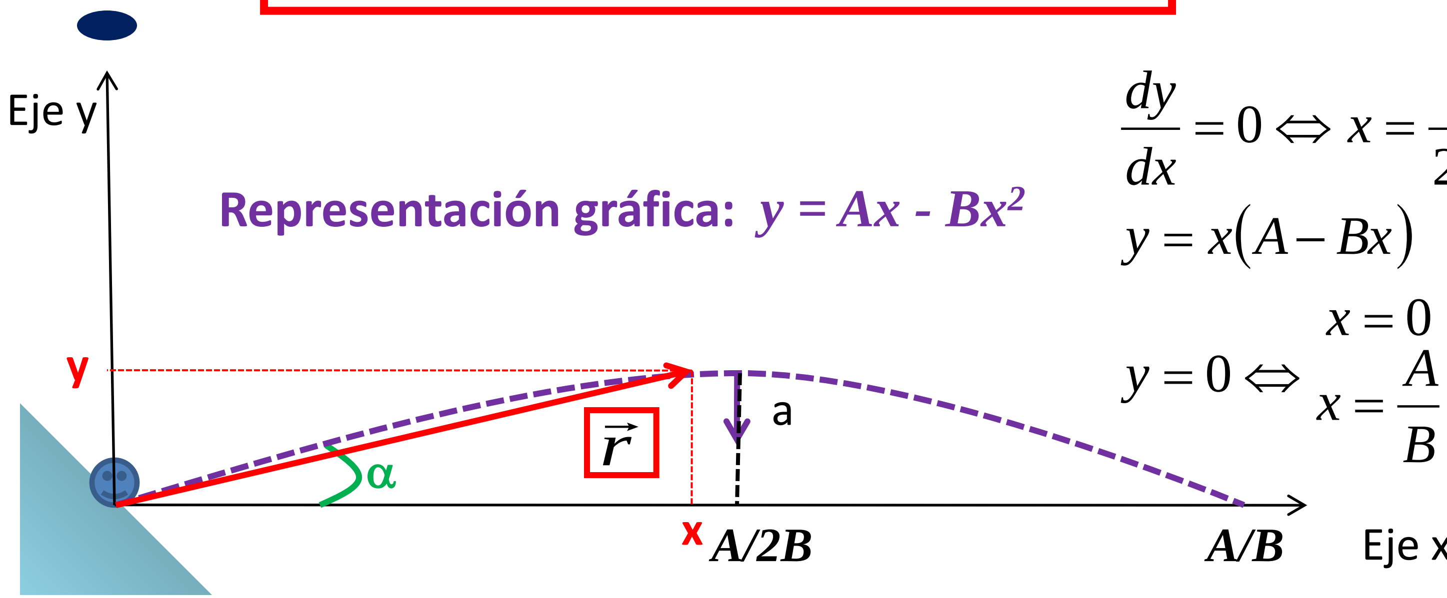


Ecuación de la trayectoria

- Si eliminamos ***t*** de las ecuaciones de ***x*** e ***y***:

$$\boxed{y = \tan\alpha \cdot x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2}$$

Representación gráfica: $y = Ax - Bx^2$



$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{A}{2B}$$

$$y = x(A - Bx)$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = \dfrac{A}{B} \end{matrix}$$

Ecuación de la trayectoria

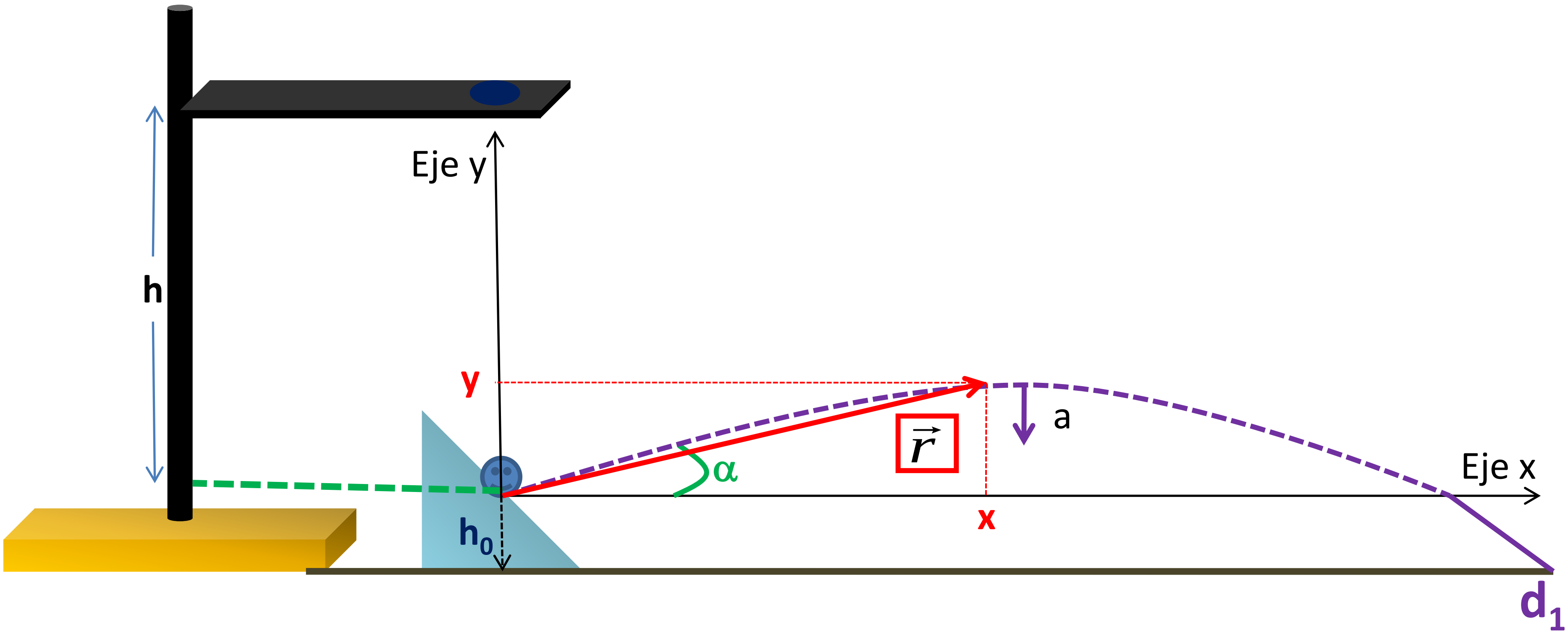
- Alcance del cuerpo: $d = A/B$

$$d = \frac{\tan\alpha}{\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}} \rightarrow d = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$Si \qquad v_0^2 = \mu \cdot v^2 \Rightarrow v_0^2 = \mu \cdot 2g \cdot h \Rightarrow d = 4\mu \cdot h \cdot \sin\alpha\cos\alpha$$

μ sería el coeficiente de absorción y representa la pérdida de velocidad por el impacto

Tiro parabólico: caso práctico



$$-h_0 = \tan\alpha \cdot d_1 - \frac{1}{4\mu \cdot h \cdot \cos^2\alpha} d_1^{\,2}$$

Recapitulando…

- Cinemática: nos limitamos a realizar la descripción del movimiento, sin analizar las causas
  - Ecuaciones de $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$
  - Ecuación de la trayectoria

- Dinámica: ahora nos falta analizar el porqué…

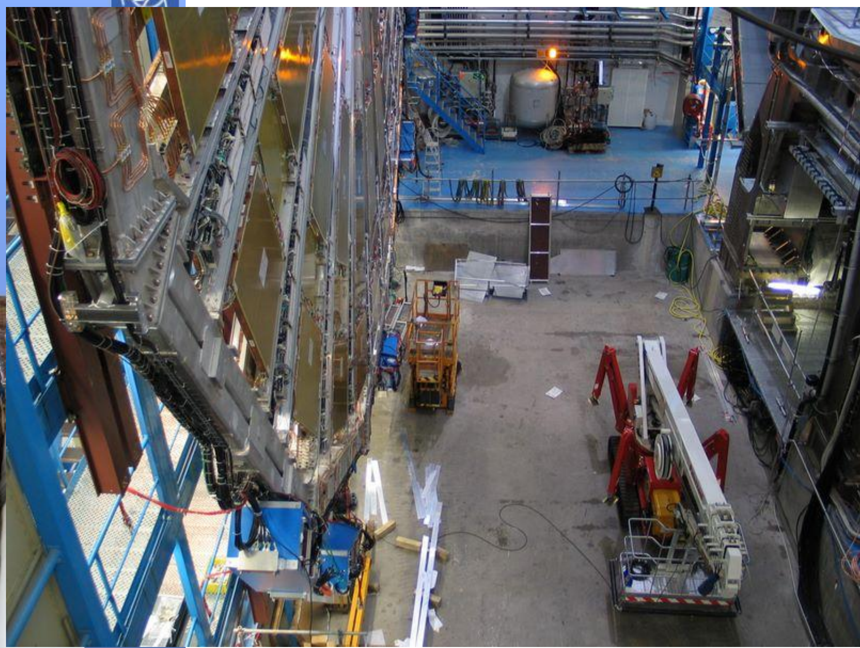
Fuerza e interacción gravitatoria

- Tenemos que preguntarnos: ¿por qué cae la canica?
  - Según la segunda ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

CAUSA $\boxed{\vec{F} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \neq 0}$ EFECTO

  - ¿Recordáis cuál es la primera ley de Newton?
  - Para que $\vec{F} \neq 0$ tiene que existir una INTERACCIÓN, en el caso que nos ocupa ésta es la <u>interacción gravitatoria</u> o gravedad que es producida por la masa de los cuerpos

Buscando el origen de la interacción gravitatoria



LHC

La fuerza de la gravedad

- La interacción entre dos cuerpos a través de sus masas, de magnitudes m y M, se cuantifica mediante la fuerza de la gravedad $\vec{F}$

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad donde \quad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$$

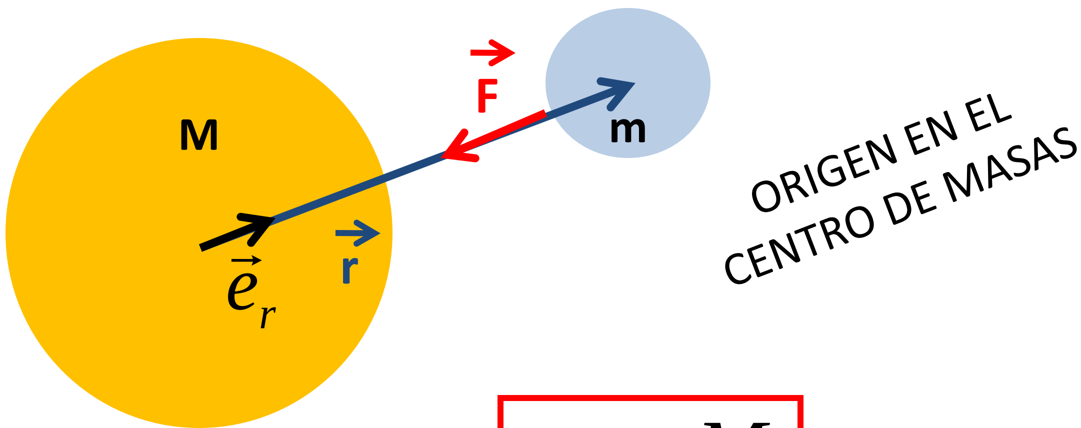
CONSTANTE DE NEWTON

- Unidad de fuerza: Newton (N)=kg·m·s^{-2}
- La fuerza tiene dos partes: el módulo ***F*** y la dirección $\vec{\boldsymbol{r}}/\boldsymbol{r}$

La fuerza de la gravedad

- **Dirección:**

$$\boxed{\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}}$$



- **Módulo:**

$$\boxed{G\frac{m \cdot M}{r^2}}$$

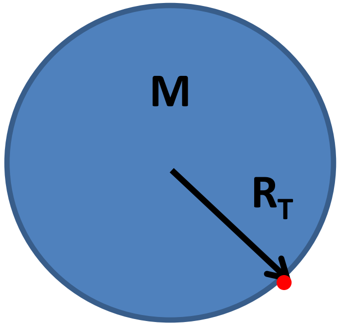
La fuerza la sienten los dos cuerpos (tercera ley de Newton) pero cuando m << M el efecto es sólo apreciable en el cuerpo de masa menor ($\vec{F} = m\cdot\vec{a}$)

La fuerza de la gravedad

- Desde el punto de vista del cuerpo de masa m

$$\vec{F} = m \cdot \left(G \frac{M}{r^2} \right) \cdot \left(-\vec{e}_r \right)$$

- Ejemplo: **calcular la aceleración que experimenta un objeto situado sobre la corteza terrestre**



$$M = 5{,}98 \cdot 10^{24} kg$$
$$R_T = 6378{,}13 \quad km$$
$$g = \frac{G \cdot M}{R_T^2}$$
$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} kg}{6378{,}13^2 \cdot 10^6 m^2} = \ldots$$

Campo y potencial gravitatorios

Desde el punto de vista del cuerpo de masa *m* la Tierra posee un campo gravitatorio a su alrededor de magnitud inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que va desde su origen al cuerpo de masa *m*

$$\boxed{\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r}$$

CAMPO GRAVITATORIO GENERADO POR UN CUERPO DE MASA M A UNA DISTANCIA r DE SU ORIGEN

¡La intensidad de la interacción depende de la masa M!

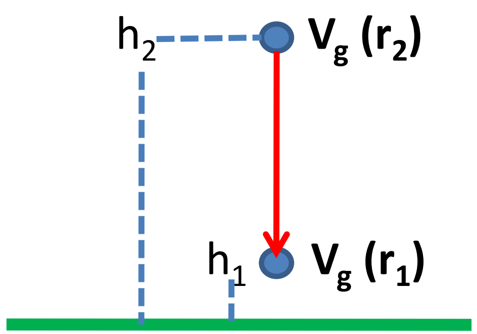
Campo y potencial gravitatorios

- ¿Cómo se puede obtener también $\vec{g}$?

$$\boxed{\vec{g} = \frac{dV_g}{dr}\vec{e}_r \rightarrow \quad V_g = G\frac{M}{r}}$$

V_g es el potencial gravitatorio.

En el potencial se encuentra el origen de la interacción



$V_g(r_2) < V_g(r_1)$ ⇨ El cuerpo cae

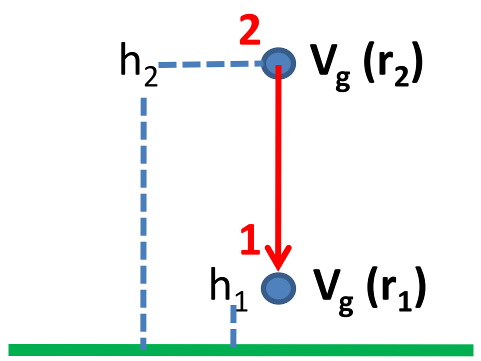
$$\boxed{Si \quad V_g(r_2) \neq V_g(r_1), \quad \vec{g} \neq 0 \Rightarrow \vec{F} \neq 0}$$

Recapitulando…

- Hemos revisado el sentido de las leyes fundamentales de la Mecánica para la interacción gravitatoria.
- Hemos definido el campo gravitatorio a partir de la ecuación que verifica la fuerza de la gravedad.
- Hemos obtenido también el campo gravitatorio a partir de una nueva magnitud: el potencial gravitatorio.

Trabajo y energía

- Si se sitúa un cuerpo en h_2 se desplazará "sin ayuda" por la acción de la gravedad
- Si definimos el trabajo dW que ser realiza para desplazar un cuerpo entre dos puntos separados por un $d\vec{r}$ como : $dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$, el trabajo realizado por la interacción entre h_2 y h_1 será: $\Delta W_{21} = mg(h_1 - h_2)$.

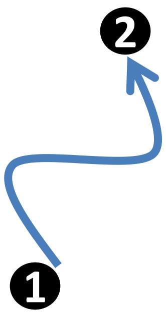


Pero ¡¡¡$h_1 < h_2$!!! $\Rightarrow$ $W_{21} < 0$ (¿?)

En el caso de que el trabajo lo realice la interacción, será negativo

$\boxed{\text{UNIDADES S.I.: Julio (J) = N·m}}$

Trabajo y energía



$$dW = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_1^2 dW = -\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_1^2 dW = \Delta W_{12}$$

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \int_1^2 m d\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = \int_1^2 m\vec{v}d\vec{v} = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$\Delta W_{12} = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

Trabajo y energía

- **Consecuencias**
  - Hemos obtenido una nueva magnitud: la energía cinética

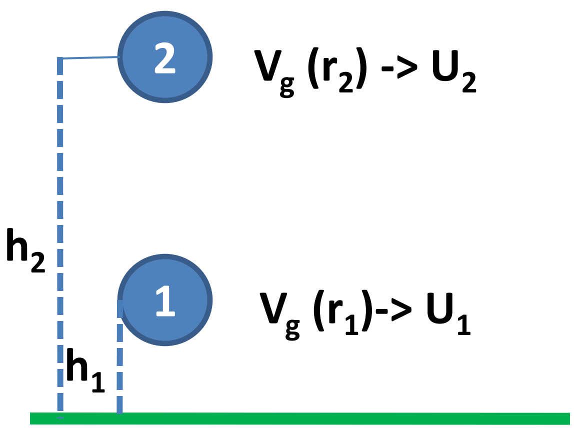
$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$$

  - El trabajo se convierte en energía cinética y viceversa

$$\boxed{\Delta W_{12} = \frac{1}{2} m \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right) = T_1 - T_2}$$

La energía potencial

- Si el trabajo se convierte en energía cinética, se puede considerar que el trabajo representa un cambio en la energía del objeto asociada a la interacción gravitatoria:



$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta W_{12} = mgh_2 - mgh_1 = U_2 - U_1 \\ \Rightarrow \quad U = mgh \end{array}}$$

Tenemos: $\vec{g}$ -> $\vec{F}$

V_g-> Ep

Conservación de la energía mecánica

$$\Delta W_{12} = \frac{1}{2} m \cdot \left(v_1^2 - v_2^2 \right)$$

$$mg\left(h_2 - h_1 \right) = \frac{1}{2} m \cdot \left(v_1^2 - v_2^2 \right)$$

$$mgh_2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = mgh_1 + \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$U_2 + T_2 = U_1 + T_1 \Rightarrow U + T = cte.$$

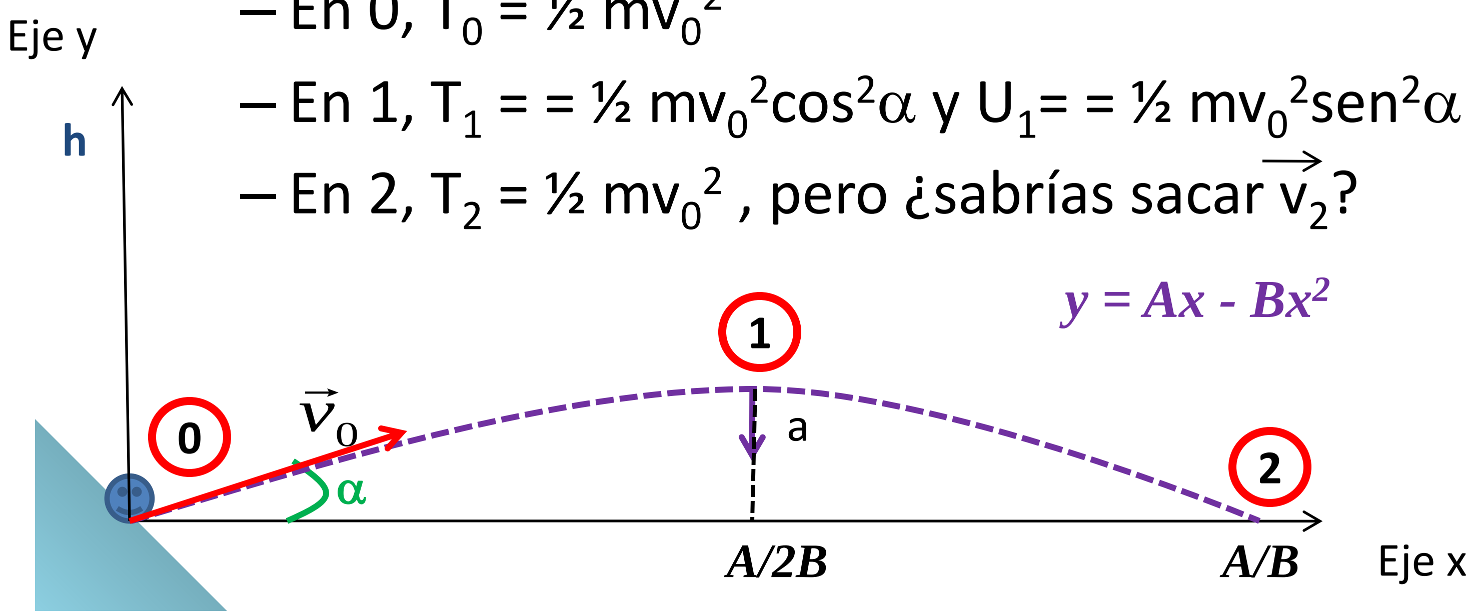
En resumen…

- Por definición: $dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$. En el caso de que el movimiento se produzca a favor de la fuerza de interacción su valor es negativo.
- Cuando tratamos con interacciones se define la energía potencial de un cuerpo sometido a la interacción de modo que: $\Delta W_{12} = U_2 - U_1$
- La energía potencial puede entenderse como la energía que acumula un cuerpo al interaccionar con otro.
- En el caso de la interacción gravitatoria se cumple el principio de conservación de la energía mecánica

$$\boxed{U_2 + T_2 = U_1 + T_1 \Rightarrow U + T = cte.}$$

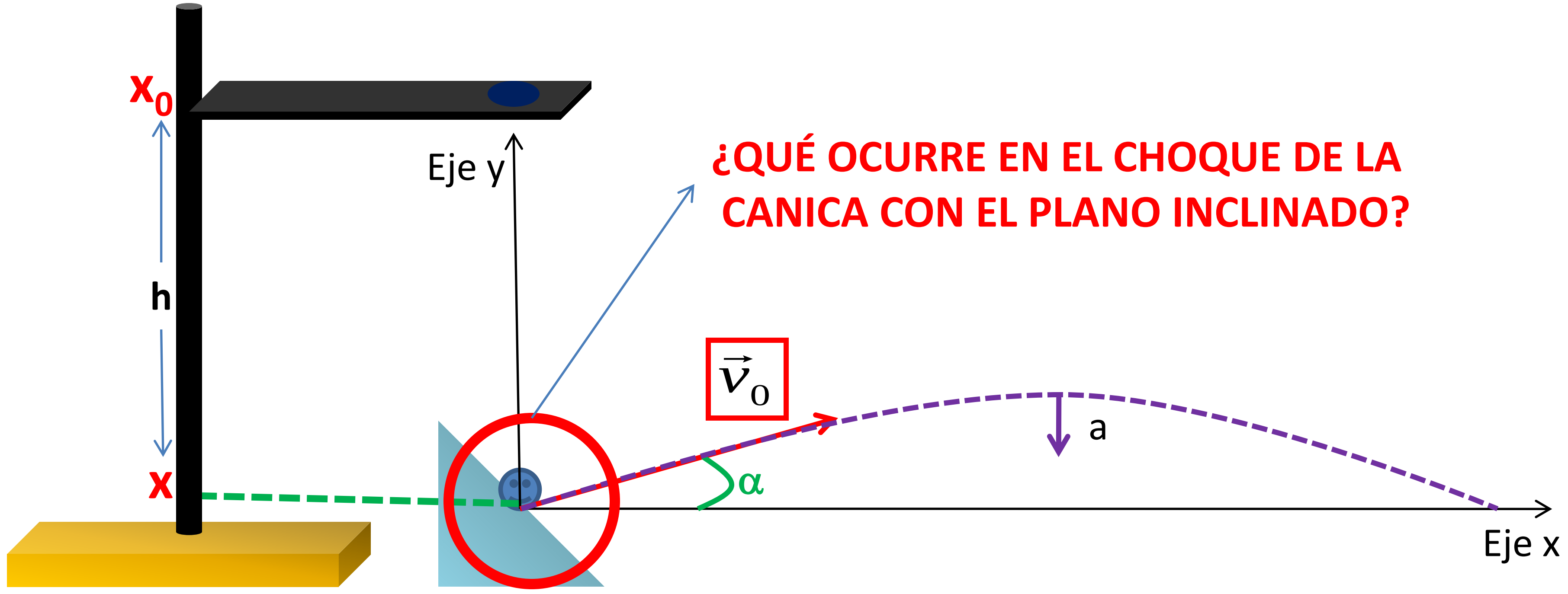
Balance energético en el Tiro Parabólico

- Movimiento unidimensional: $mgh = ½\, mv^2$
- Movimiento parabólico:
  - En 0, $T_0 = ½\, mv_0^2$
  - En 1, $T_1 = = ½\, mv_0^2\cos^2\alpha$ y $U_1 = = ½\, mv_0^2 \mathrm{sen}^2\alpha$
  - En 2, $T_2 = ½\, mv_0^2$, pero ¿sabrías sacar $\overrightarrow{v_2}$?



DETERMINAR LA ALTURA MÁXIMA QUE ALCANZA LA CANICA EN SU TRAYECTORIA PARABÓLICA EN FUNCIÓN DE LA ALTURA DEL LANZAMIENTO

Transferencia de energía mediante choques



Caso simple: choque elástico

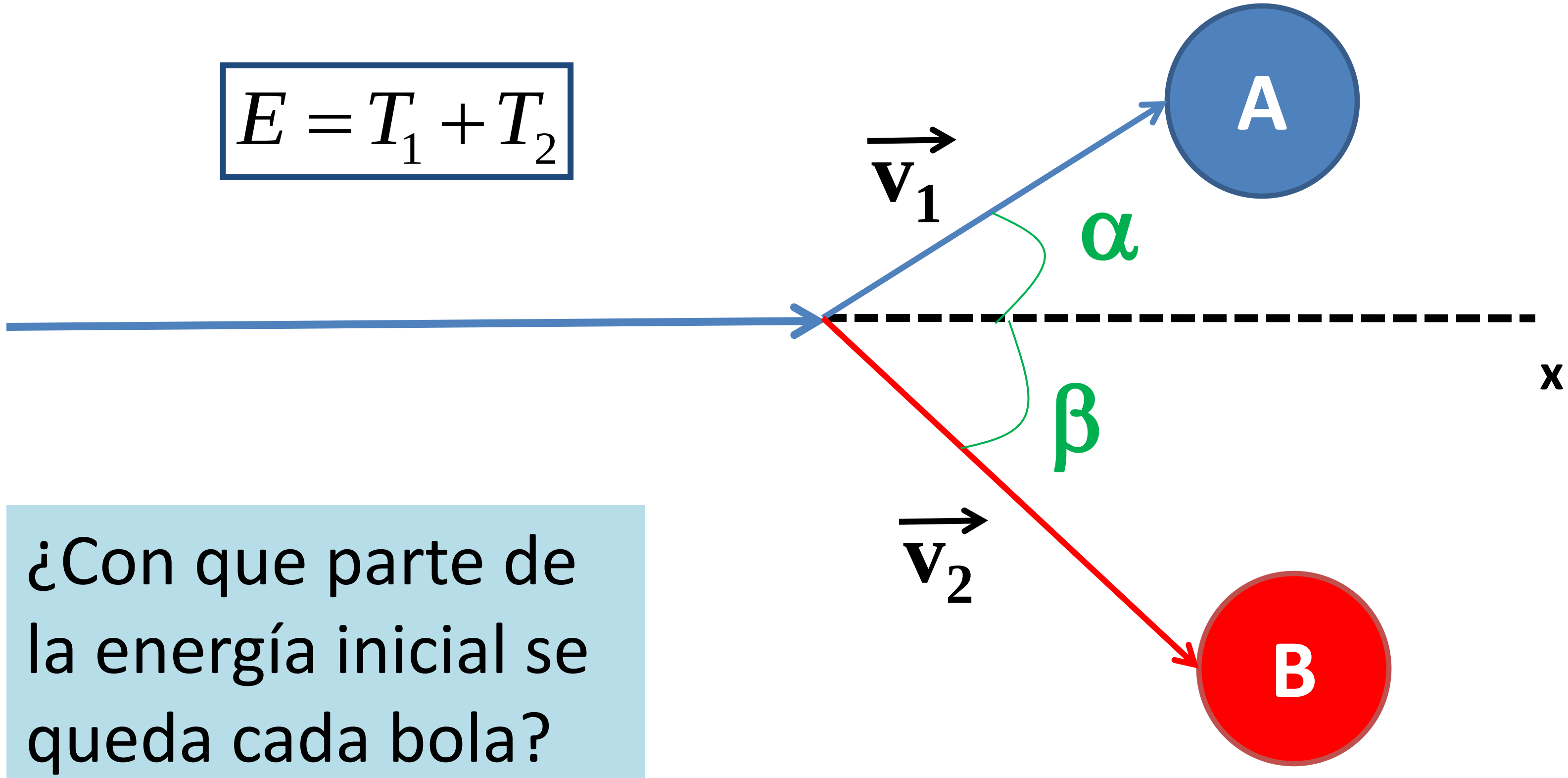
- Sistema <u>aislado</u> formado por las dos bolas
- Los dos cuerpos que chocan son libres para moverse

    ❖ ANTES DEL CHOQUE: $\boxed{E = T_0}$

Caso simple: choque elástico

❖DESPUÉS DEL CHOQUE:

$$\boxed{E = T_1 + T_2}$$

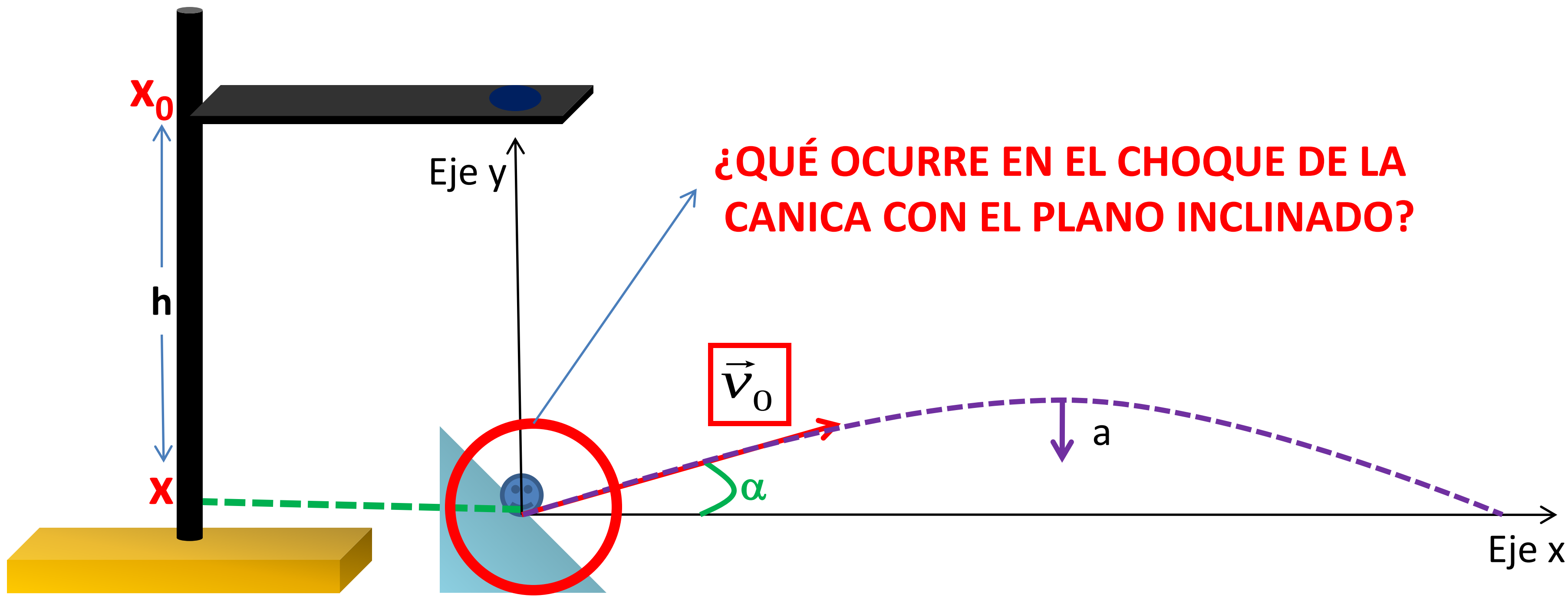


¿Con que parte de la energía inicial se queda cada bola?

Caso simple: choque elástico

- Aplicamos el principio de la conservación de la energía: $E_i = E_f$
- Como el sistema está aislado, aplicamos también el principio de conservación del impulso o momento lineal $\vec{p}$: $\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f$
- Obtenemos tomando $m_B = m_A$: $$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= T_0 \cos^2 \alpha \\ T_2 &= T_0 \sin^2 \alpha \end{aligned}}$$

Choque inelástico



El plano inclinado no es un cuerpo libre ($\vec{v_2}$=0)→ asumimos que $m_2 >> m_1$ y definimos $\lambda = m_1/m_2 << 1$

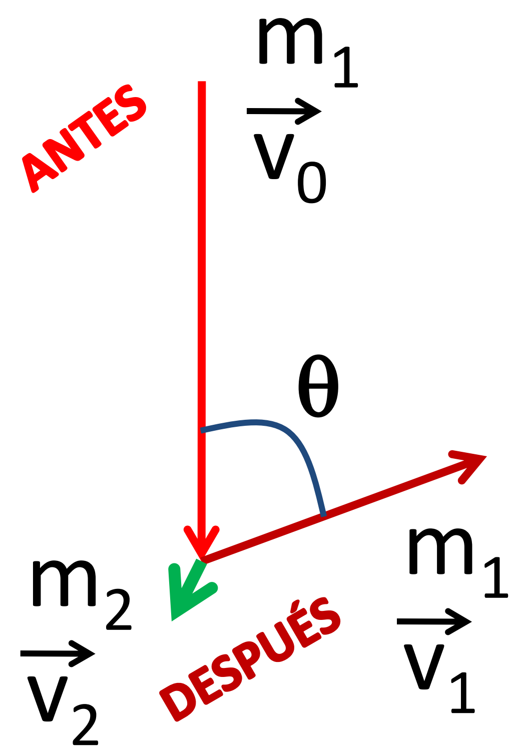
Choque inelástico

- Por conservación de la energía:

$$Q = T_0 - T_1 - T_2$$

$$Q = T_0\left(1 - \frac{\lambda v_1^2 + v_2^2}{\lambda v_0^2}\right) \qquad donde \quad \lambda = \frac{m_1}{m_2}$$

$$e \equiv \frac{\left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right|}{v_0} \Rightarrow e^2 {v_0}^2 = {v_1}^2 + {v_2}^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$



- Por conservación del impulso:

$$m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow {m_1}^2{v_0}^2 = {m_1}^2{v_1}^2 + {m_2}^2{v_2}^2 + 2m_1m_2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

$$\lambda {v_0}^2 = \lambda {v_1}^2 + \frac{1}{\lambda}{v_2}^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

¡ATENCIÓN! v_1 es la velocidad inicial de la canica en el movimiento parabólico

Choque inelástico

- Grado de inelasticidad dado por el coeficiente de restitución, ***e***:

$$e \equiv \frac{\left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right|}{v_0} \Rightarrow e^2 {v_0}^2 = {v_1}^2 + {v_2}^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

- Al final, de la conservación de E obtenemos:

$$Q = T_0\left(1 - \frac{\lambda + e^2}{\lambda + 1}\right)$$

En la práctica, e^2 es μ, coeficiente de absorción

Como $\lambda \ll 1$, $\boxed{Q \cong T_0\left(1 - e^2\right) = T_0\left(1 - \mu\right)}$

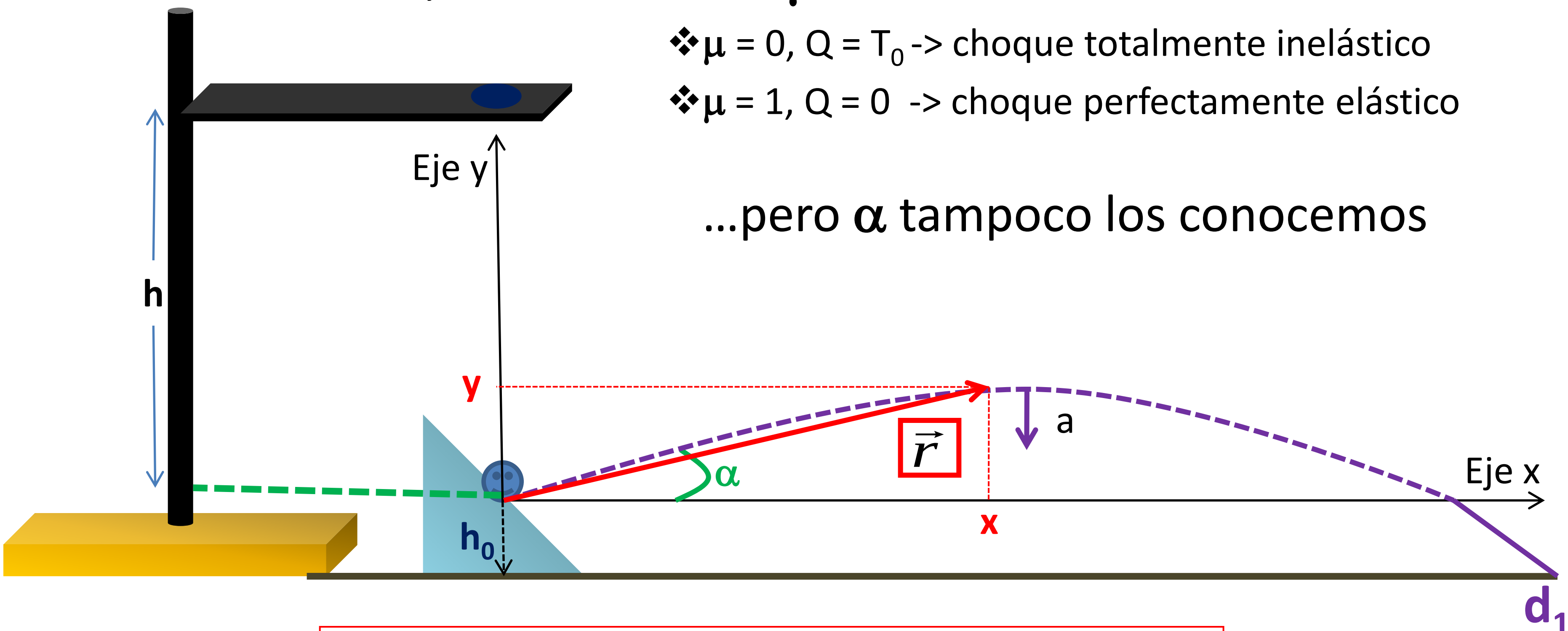
Choque inelástico: caso práctico

- En resumen, el cálculo de μ nos daría Q

❖ $\mu = 0$, $Q = T_0$ -> choque totalmente inelástico

❖ $\mu = 1$, $Q = 0$ -> choque perfectamente elástico

...pero **α** tampoco los conocemos



$$\boxed{-h_0 = \tan\alpha \cdot d_1 - \frac{1}{4\mu \cdot h \cdot \cos^2\alpha} d_1^{\,2}}$$

Choque inelástico: caso práctico

- Reordenamos la expresión para que tenga forma de recta:

$$-h_0 = \tan\alpha \cdot d_1 - \frac{1}{4\mu \cdot h \cdot \cos^2\alpha} d_1^{\,2}$$

$$-h_0 \cdot \mu \cdot \cos^2\alpha = \tan\alpha \cdot \mu \cdot \cos^2\alpha \cdot \overbrace{d_1}^{x} - \overbrace{\frac{d_1^{\,2}}{4h}}^{y}$$

$$y = \frac{d_1^{\,2}}{4h}, \qquad x = d_1 \Rightarrow y = \mu \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot x + h_0 \cdot \mu \cdot \cos^2\alpha$$

$$a = h_0 \cdot \mu \cdot \cos^2\alpha$$

$$b = \mu \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

¿Cómo obtenemos de a y b los valores de μ y α?

Ejemplo

- Determinar la energía mecánica que se pierde cuando dos partículas iguales de 5 kg cada una, una en reposo y otra con una velocidad de 5 m/s, colisionan y salen unidas. ¿En qué dirección salen?