Tema 1. La medida en Física

Estadística de la medida

Cifras significativas e incertidumbre

Contenidos

- Herramienta para representar los valores de las magnitudes físicas: los números
  - Sistemas de unidades
  - Notación científica
- Estadística de la medida
- Definición de incertidumbre
- Representación del resultado de la medida: cifras significativas

Sistemas de unidades

MAGNITUDES FUNDAMENTALES EN MECÁNICA: masa (M), longitud (L), tiempo (T)

- Sistema Internacional (S.I.):
  - M ->kg, L-> m, T-> s
- Sistema cegesimal (CGS):
  - M ->g, L -> cm, T-> s
- Unidades naturales:
  - p. e. años luz en astronomía : el año luz es la distancia que recorre la luz en un año. Equivale aproximadamente a 9,46 $\times 10^{12}$ km = 9.460.000.000.000 km

Notación científica

- Es una manera rápida de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños.
- Los números se escriben como un producto:

$$a \times 10^n$$

donde *a* es la mantisa y *n*, el exponente u orden de magnitud

- Ejemplo: 0,0000000639-> $6{,}39 \cdot 10^{-8}$

Los números y los valores

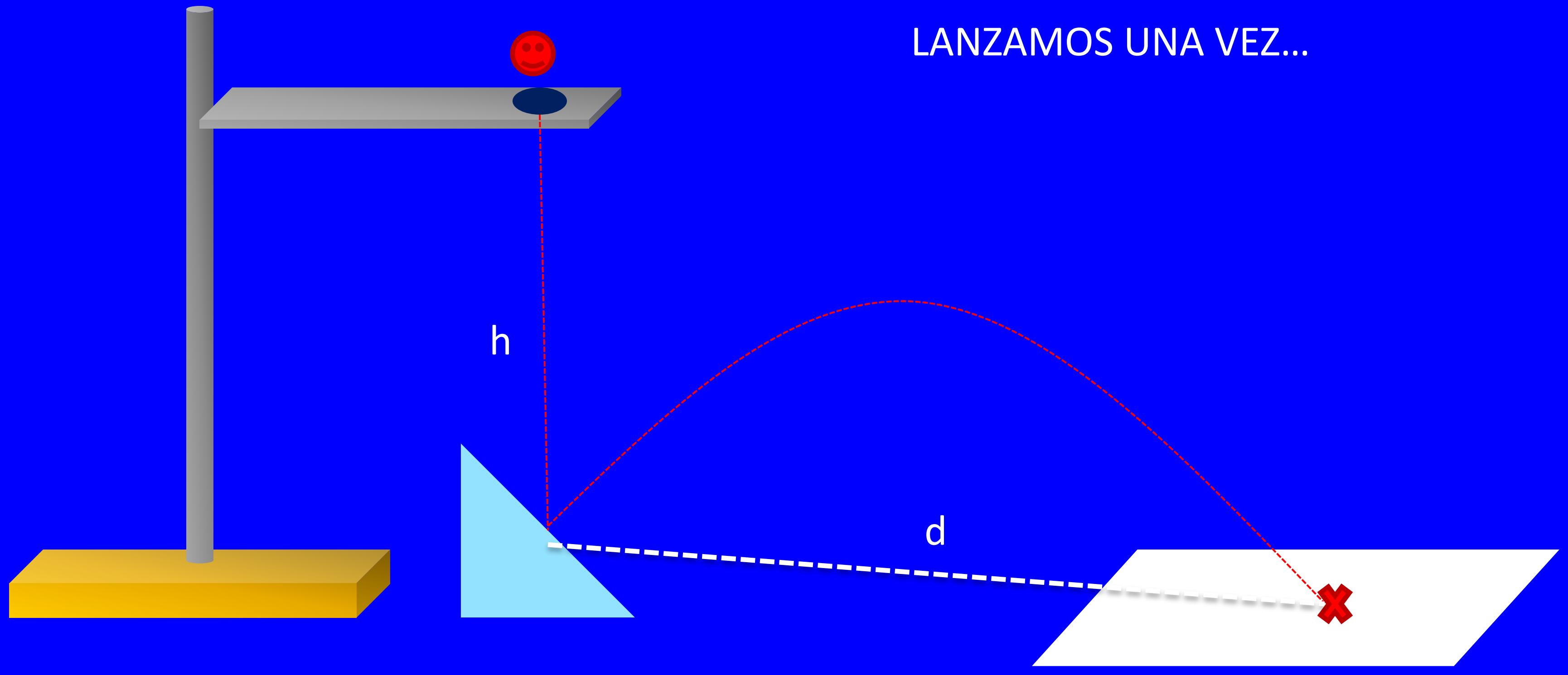
- ¿Hasta dónde podemos conocer el valor de una magnitud? Eso depende del experimento que se realice. Ejemplo: la medida de la masa de un mol de C con dos tipos de balanza (una granataria y otra normal) m_1=12,000023 g y m_2=12,00 g

- El número de cifras que se utilizan para dar el valor de una magnitud es fiel reflejo de la precisión con la que conocemos ese valor

- ¿Cómo se determina?...

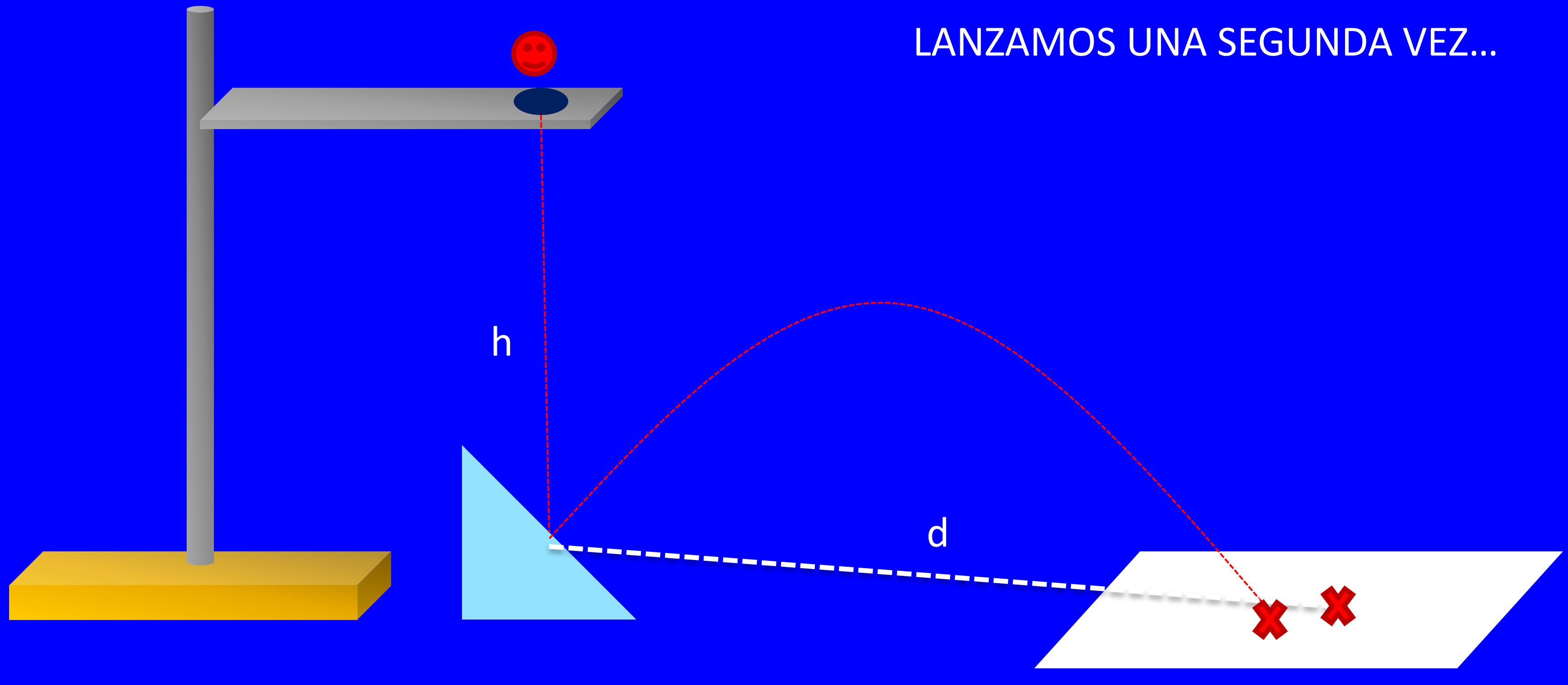
La naturaleza de la medida

- Ejemplo: Tiro parabólico



La naturaleza de la medida

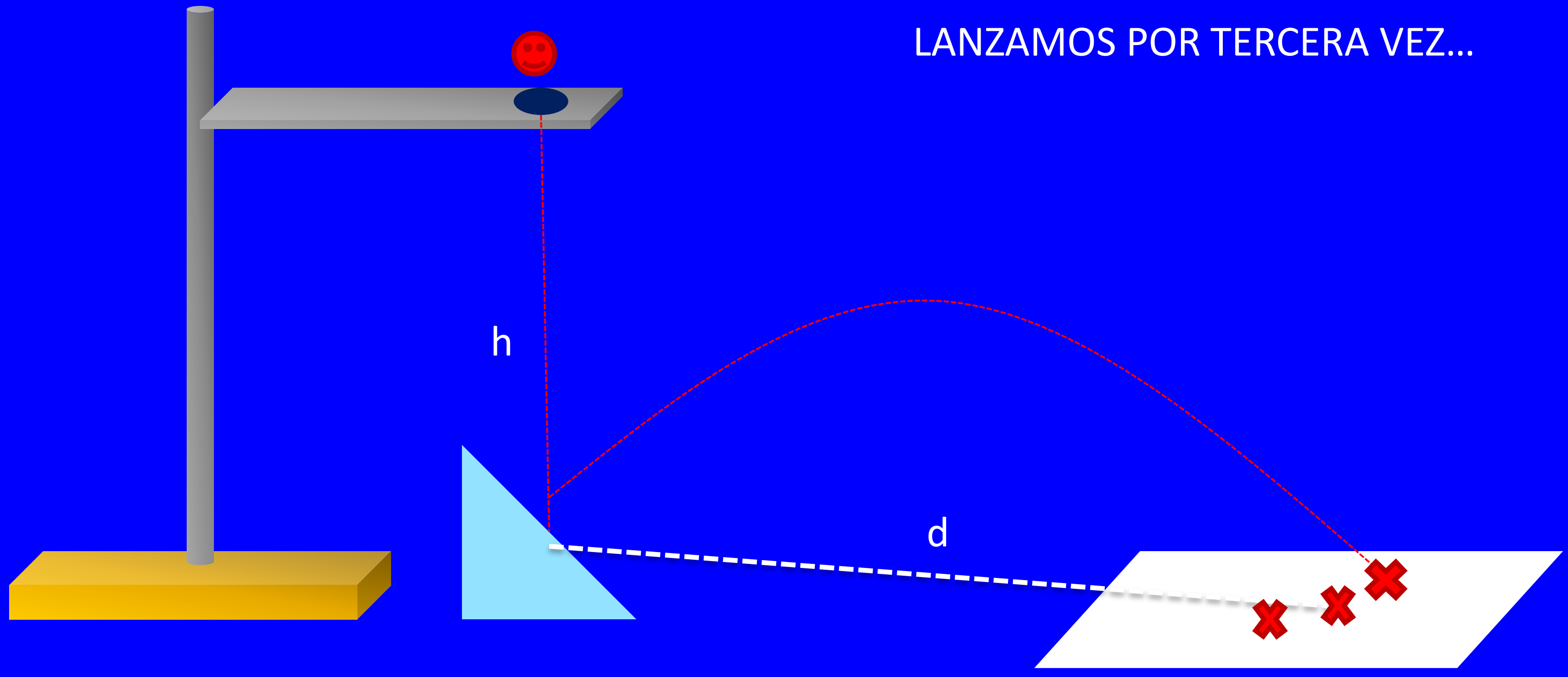
- Ejemplo: Tiro parabólico



La naturaleza de la medida

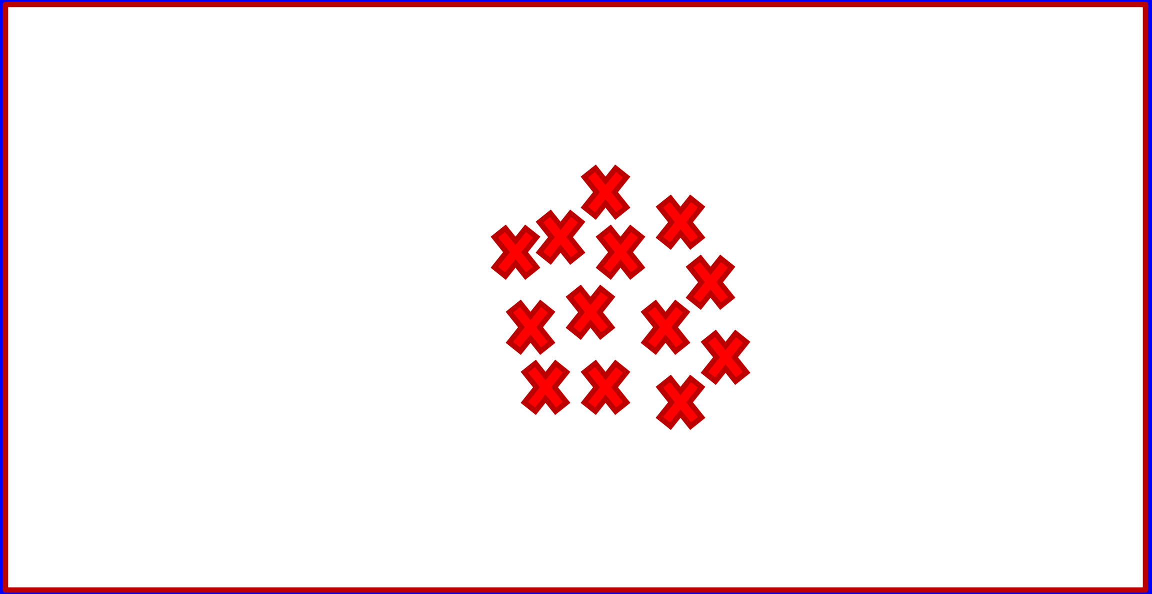
- Ejemplo: Tiro parabólico

LANZAMOS POR TERCERA VEZ…



La naturaleza de la medida

- Tras n lanzamientos “idénticos”…



¿Cuál es entonces el alcance de la canica?

Estadística de la medida

- La naturaleza intrínseca de cualquier medida es estadística: los resultados cambian en cada repetición de una prueba
- Para n repeticiones, la mejor estimación de x es:

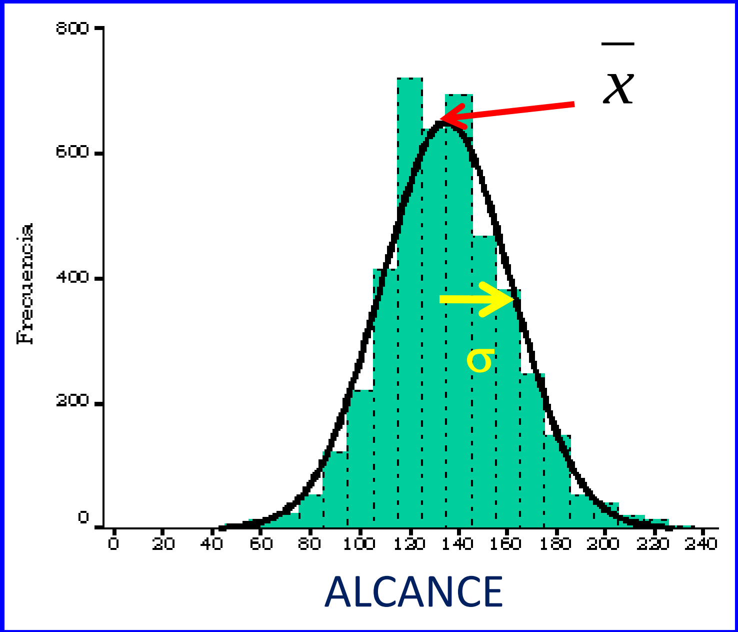
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- En nuestro experimento, *x* será *d*, el alcance. Si lanzamos 20 veces la canica a una misma h:

$$\overline{d} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} d_i$$

Definición de incertidumbre

- Si todas las medidas se han realizado correctamente, cualquiera de los valores obtenidos son valores posibles de la magnitud. Todos ellos forman parte de una distribución de probabilidad
- Las fluctuaciones entre los resultados de cada repetición vienen dados por:



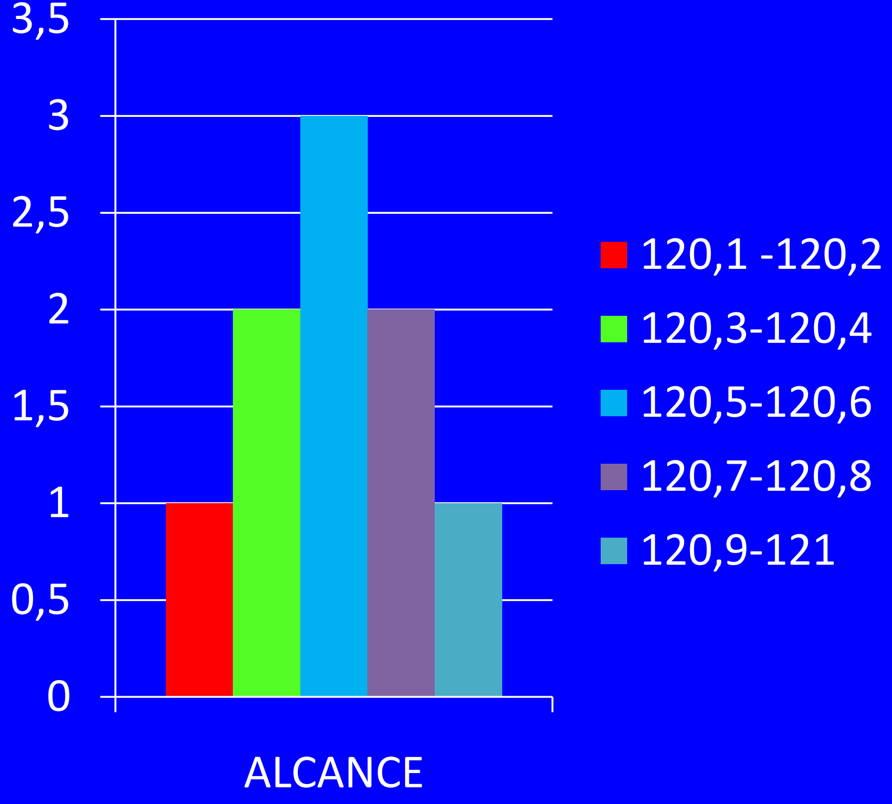
$$\sigma_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$I \propto \sigma = \sqrt{\sigma_{n-1}^2}$$

Estadística de la medida

- Ejemplo: 10 lanzamientos desde una altura h

i	d (mm)
1	120,1
2	120,9
3	120,6
4	120,3
5	120,5
6	120,7
7	120,4
8	120,6
9	121,0
10	120,8



Estadística de la medida

- ¿Cuál es el resultado que obtenemos del alcance d?
  - Calculamos el valor medio:

$$\bar{d} = \frac{1}{10}(120{,}1 + 120{,}9 + 120{,}6 + 120{,}3 + 120{,}5 + 120{,}7 + 120{,}4 + 120{,}6 + 120{,}0 + 120{,}8) = 120{,}49 \cong 120{,}5$$

  - Calculamos la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{n-1}^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10}(d_i - \bar{d})^2\right.}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{9}\left((120{,}1 - 120{,}5)^2 + (120{,}9 - 120{,}5)^2 + (120{,}6 - 120{,}5)^2 + (120{,}3 - 120{,}5)^2 + (120{,}5 - 120{,}5)^2 + \ldots\right)}$$

$$\boxed{\sigma = 0{,}2925\ldots \cong 0{,}3}$$

Estadística de la medida

- El resultado es:

$$\boxed{\begin{aligned} d &= \bar{d} \pm \sigma \\ d &= (120{,}5 \pm 0{,}3)\,mm \end{aligned}}$$

- Para esta asignatura asumiremos que $I = \sigma$.

  En otros contextos, podría ser también I=2σ, 3σ…= kσ donde k representa el factor de cobertura

Incertidumbre y cifras significativas

- La incertidumbre da la precisión del experimento → determina el número de cifras significativas del valor obtenido

- Si en general damos la incertidumbre con dos cifras el resultado sería d= (120,49 ±0,29) mm

Hemos visto:

- que la naturaleza de la medida es estadística
- cómo los números representan los valores experimentales
- cómo expresar el valor de una magnitud experimental
- el significado de las cifras significativas y cómo determinar su número

Propagación de incertidumbres

- ¿Qué hacemos cuando tenemos que realizar operaciones con los valores experimentales de una magnitud?
- Ejemplo: v ≈ d/t, d = (120,5 ± 0,3) mm
- Aplicamos la fórmula de propagación:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2$$

Propagación de incertidumbres

- En el ejemplo, si t es constante: v = y, v = f(d) , n = 1, d = x_1

$$\sigma_v^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_v = \frac{1}{t}\sigma_d$$

- En general: si $y=x_1 \cdot x_2$ ó $y=x_1/x_2$ se obtiene:

$$\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{x_2}\right)^2$$

INCERTIDUMBRE RELATIVA

Reglas nemotécnicas para propagar cifras significativas

- En multiplicaciones y divisiones:

  $$a.aaa \times dd.d = ccc$$

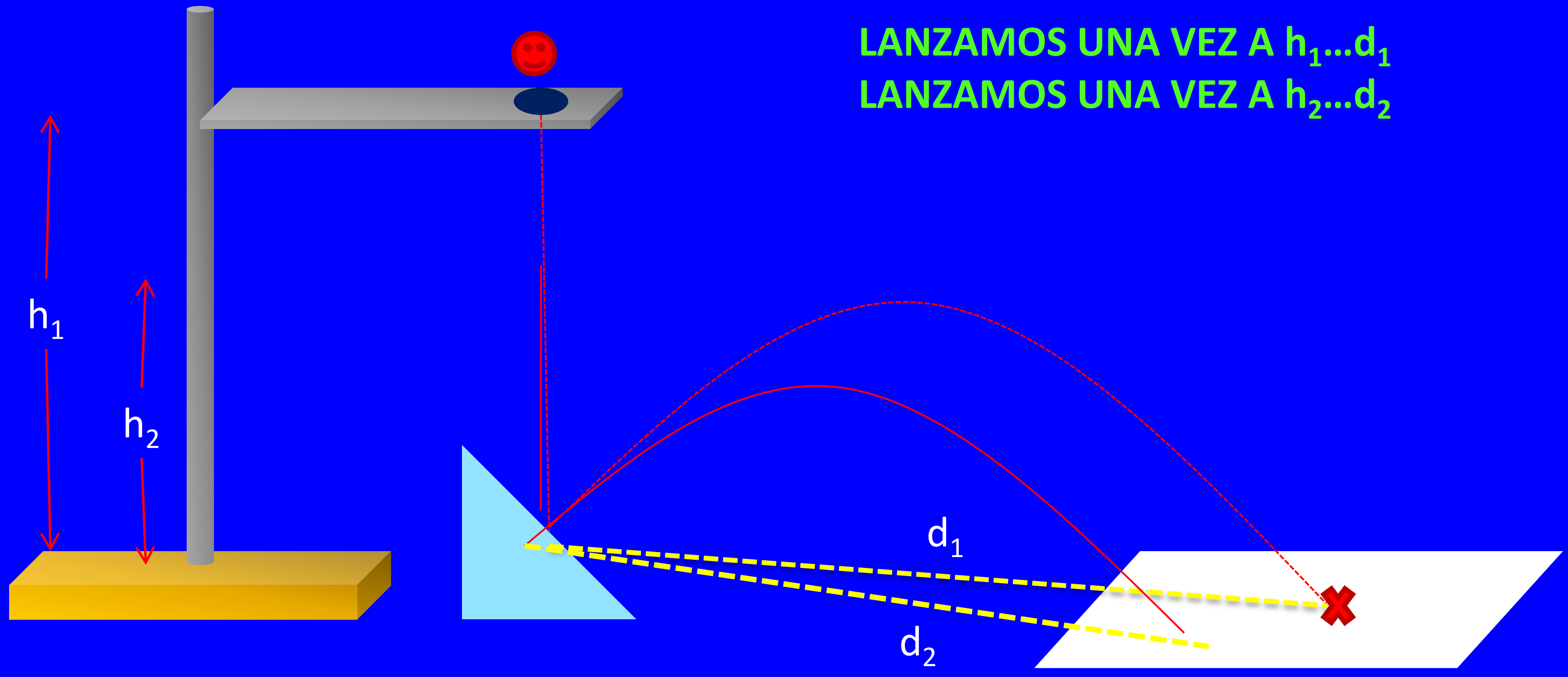
  El número de cifras significativas del resultado será igual al del operando con menos cifras significativas
- En sumas y restas: $aa.aaa + b.bb = cc.cc$. El número de cifras significativas decimales será igual al del sumando con menos cifras significativas decimales
- En operaciones con logaritmos el número de cifras significativas se conserva: $\ln (aa.a) = g.gg$

Hemos visto…

- cómo obtener directamente la estimación de una magnitud experimental mediante n repeticiones de medidas idénticas,
- cómo la incertidumbre determina el número de cifras significativas del resultado,
- cómo esta incertidumbre se propaga y determina también el número de cifras significativas en operaciones matemáticas.

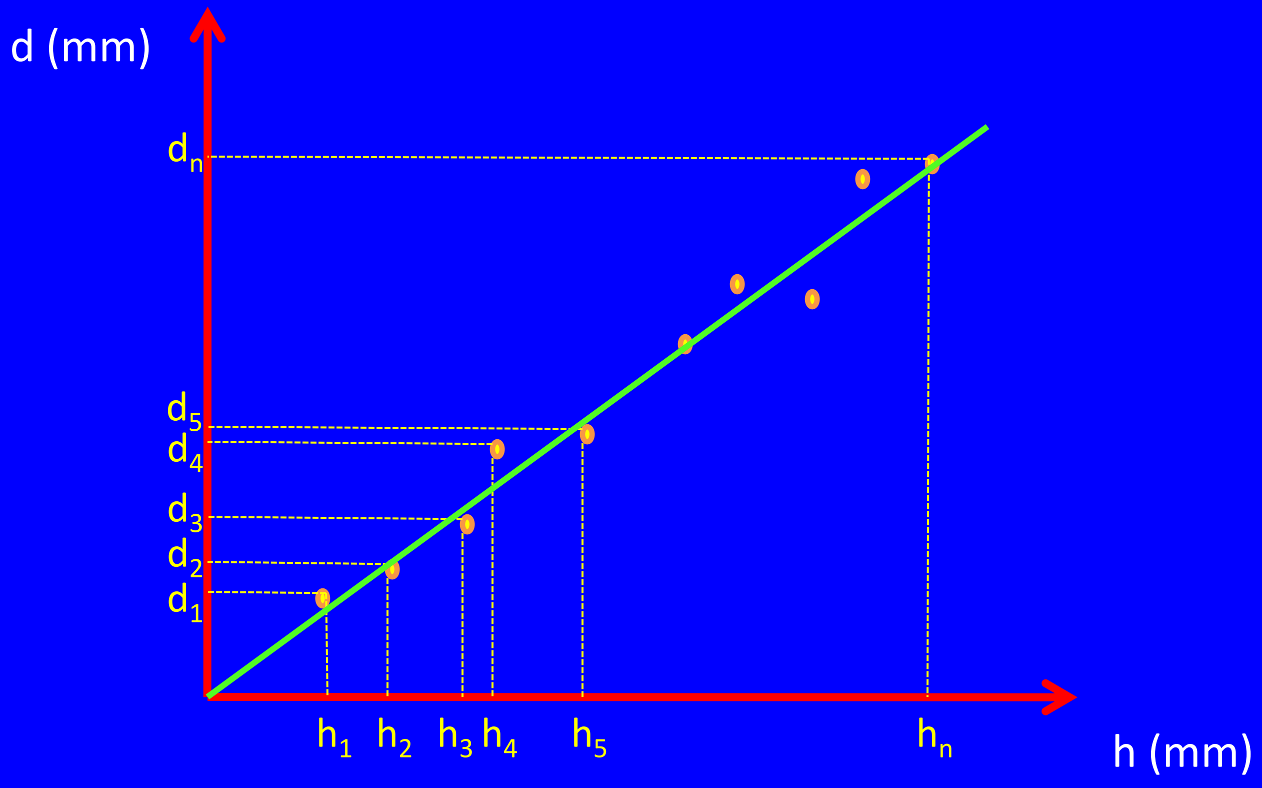
Otro tipo de experimentos

- La magnitud física de interés no se mide directamente



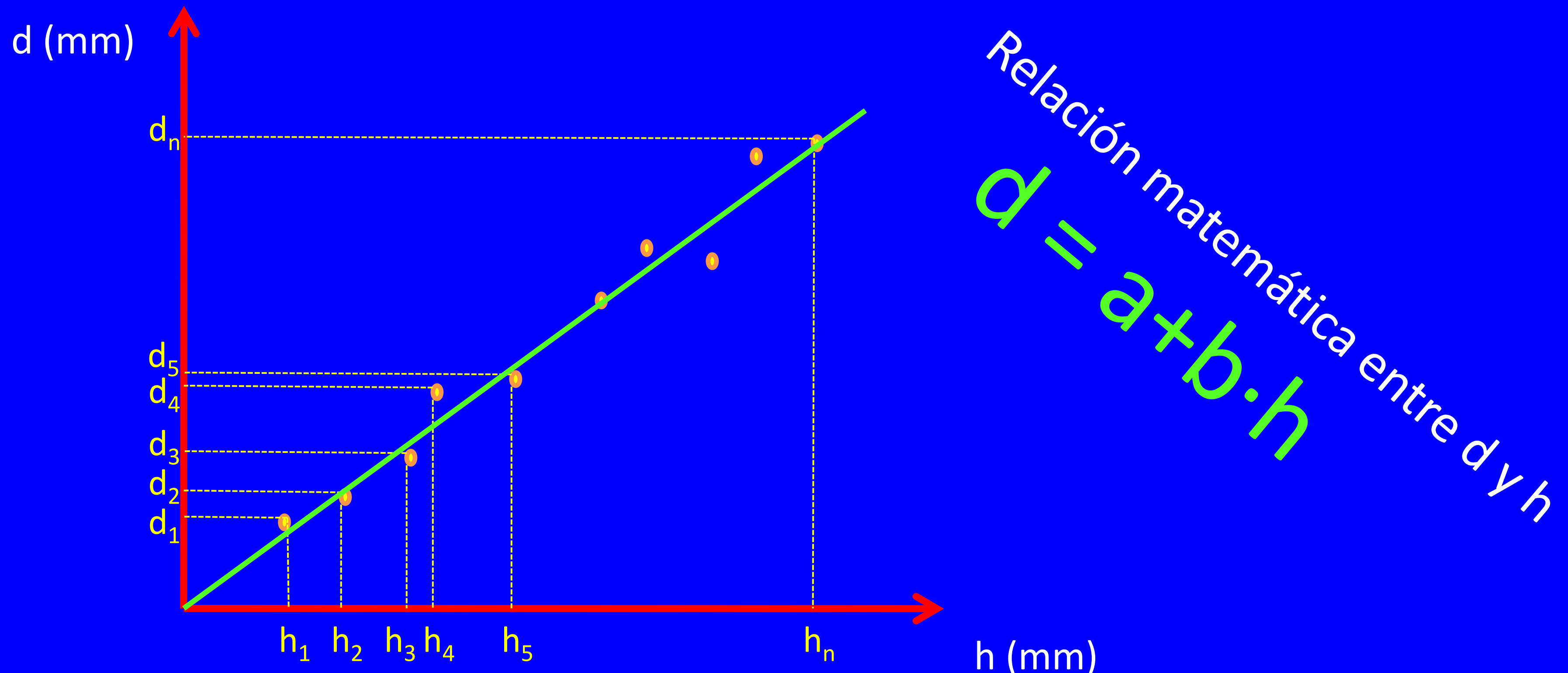
Representación gráfica

- Después de n lanzamientos a n alturas distintas: $\{(hi, di), i = 1,n\}$



Modelos fenomenológicos

- Después de n lanzamientos a n alturas distintas: $\{(hi, di), i = 1,n\}$ encontramos d= f(h)



Regresión lineal

- En general: $y = a + b \cdot x$
- En nuestro caso: $y = d$, $x = h$
- Queremos calcular el término independiente, a y la pendiente, b

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\Delta} \qquad b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Regresión lineal

- **a** y **b** son valores que se obtienen de un experimento, por lo tanto: **a** -> $\boldsymbol{\sigma_a}$ y **b** -> $\boldsymbol{\sigma_b}$

$$\sigma_a^2 = \frac{s^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\Delta} \qquad \sigma_b^2 = \frac{n \cdot s^2}{\Delta}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - b \cdot x_i \right)^2$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2} \frac{s_y^2}{s_x^2}}$$

$$\sigma_a = \sqrt{s_b^2 \overline{x^2}}$$

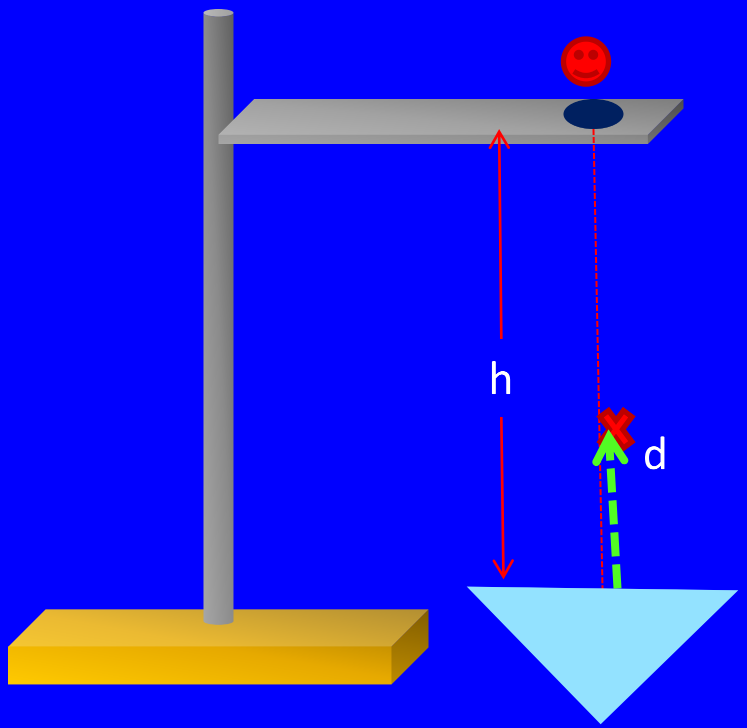
- El resultado es entonces: : **a ± $\boldsymbol{\sigma_a}$ y b ± $\boldsymbol{\sigma_b}$**

Regresión lineal

- El coeficiente de regresión nos dice si los datos se comportan linealmente según la recta calculada.

$$r \equiv \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)^{1/2}\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)^{1/2}}$$

La Física y el modelo matemático



LANZAMOS UNA VEZ…

$$v_i^2 = 2g \cdot h$$

$$v_0^2 = \mu \cdot v_i^2 \qquad d = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$d = \mu \cdot h$$

$\mu = b$

La resistencia eléctrica de un material depende de su temperatura según la expresión $R = R_0(1+\alpha T)$ donde R_0 es la resistencia a 0ºC y α el coeficiente térmico de resistencia. Para medir la resistencia, aislamos el material mediante un tubo de vidrio y lo sumergimos en el baño de hielo con el que llenamos un calorímetro. En estas condiciones realizamos 9 medidas de la resistencia con un multímetro (V=I·R), obteniéndose:

R_0 (Ω)	518	516	513	511	514	513	515	514	512

Posteriormente vamos aumentando gradualmente la temperatura del baño hasta los 100ºC midiendo la resistencia a diferentes temperaturas. Los resultados obtenidos son:

T (ºC)	20	40	60	80	100
R (Ω)	560	578	630	692	718

a) Calcular el valor de R a 0 ºC

b) Representar gráficamente los resultados experimentales obtenidos a diferente T

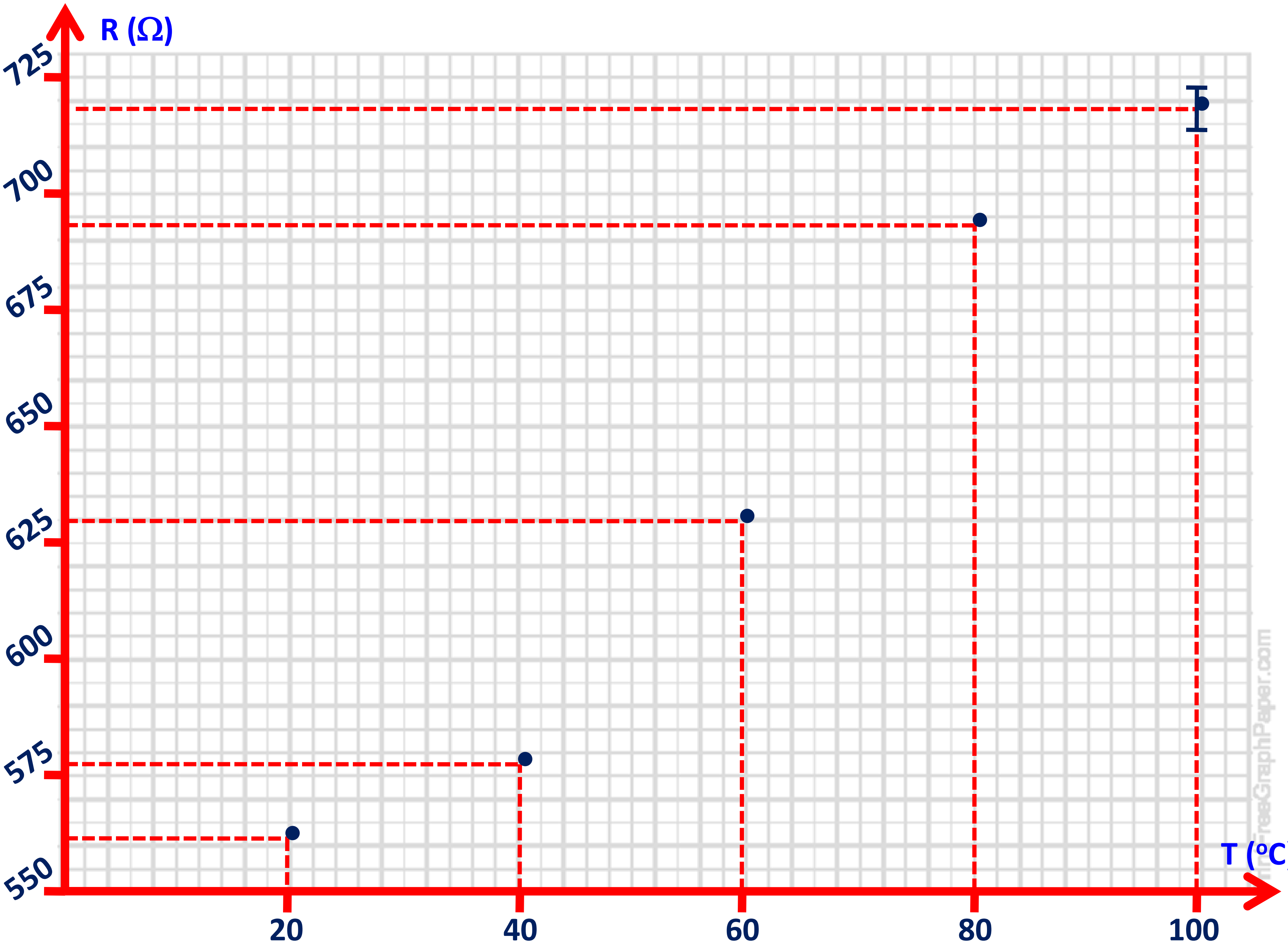
c) Ajustar según el modelo matemático más adecuado

d) Obtener R_0 y α de los parámetros obtenidos del ajuste

e) Realizar una comparación crítica de los valores de R_0 calculados en a) y d). ¿Qué estimación es mejor?

Reglas para realizar la representación gráfica

- Dibujar ejes de coordenadas que ocupen todo el ancho y el alto del papel.
- Los valores de la magnitud que se representan en cada eje deben ocupar toda la longitud del mismo.
- La escala de cada eje debe de ser lo suficientemente fina como la precisión con la que se tienen los valores a representar.
- Los símbolos que representan cada punto experimental deben ser pequeños, lo justo para que se vean. ¡No utilizar símbolos grandes, tapan el valor! Siempre que sea posible se deben acompañar de las barras de "error".


R (Ω)
725
700
675
650
625
600
575
550
T (ºC)
20
40
60
80
100